Proposition 1. *Soient $\tau = (1, d+1)$ et $c = (1, ..., n) \in \mathfrak{S}_n$. On suppose que d divise n et on note $l = n/d$. On a alors l'isomorphisme de groupes :*

$$\langle c, \tau \rangle \simeq \mathfrak{S}_l^d \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

Soit $\tau = (1, d+1)$ et $c = (1, ..., n)$. On fait agir le groupe G engendré par τ et c sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par permutation des éléments en identifiant τ avec $(0, d)$, et c avec $(0, ..., n-1)$.

Soit

$$H_i := i + d\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,\ 0 \leq i \leq d-1$$

et $\mathscr{H} = \{H_i, 0 \leq i \leq d-1\}$.

L'action de G sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ induit une action de G sur $\mathscr{H}$.

En effet, on a H_i stable par τ et $c \cdot H_i = H_{i+1}$. Donc $\forall \sigma \in G, \exists j_\sigma \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tel que $\sigma \cdot H_i = H_{i+j_\sigma}$ pour tout i.

Cette action étant transitive, on en déduit un morphisme surjectif :

$$j : G \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

D'autre part, le stabilisateur de H_0 s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_l$. De plus, on a l'égalité :

$$c^k \tau c^{-k} = (k, k+d+1)$$

donc $Stab(H_0) \supset \mathfrak{S}_l$ car contient l'image des permutations $(k, k+1)$.

Finalement, les $Stab(H_i)$ étant conjugués (vu que $H_i = c^{i+1}(H_0)$), on a $Stab(H_i) \simeq \mathfrak{S}_l$ pour tout i, et un morphisme injectif (les supports des éléments des $Stab(H_i)$ étant disjoints) :

$$\mathfrak{S}_l^d \hookrightarrow G.$$

On en déduit une suite exacte courte scindée donnée par :

$$1 \rightarrow \mathfrak{S}_l^d \rightarrow G \underset{\overset{s}{\leftarrow}}{\overset{j}{\rightarrow}} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

où $s : 1 \mapsto c$.

On en déduit alors l'isomorphisme :

$$G \simeq \mathfrak{S}_l^d \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$